

Teorema (Teorema da Independência do Caminho): Seja

$f : D_f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua num domínio D_f aberto e conexo. Então as seguintes proposições são equivalentes entre si.

i) f tem primitiva em D_f , ou seja, uma função holomorfa

$F : D_f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F'(z) = f(z)$ para todo o $z \in D_f$.

ii) Para qualquer caminho fechado γ em D_f tem-se

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

iii) Se $z_0, z_1 \in D_f$ são quaisquer dois pontos e $\gamma, \tilde{\gamma}$ quaisquer dois caminhos em D_f , de z_0 para z_1 , tem-se

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

Teorema de Cauchy

Teorema de Cauchy (Versão Básica): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa sobre os pontos de uma curva de Jordan $\Gamma \subset D_f$, assim como em todos os pontos do seu interior. Então

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorema da Deformação (Versão Básica): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio D_f e $\gamma, \tilde{\gamma}$ dois caminhos homotópicos em D_f , fechados ou com extremos fixos. Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

Teorema da Cauchy (Versão Homotópica): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio D_f e Γ uma curva de Jordan homotópica a um ponto em D_f . Então

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Definição: Diz-se que um domínio Ω é **simplesmente conexo** se todo o caminho fechado em Ω é homotópico a um ponto, ou seja se toda a curva de Jordan em Ω tem o seu interior em Ω .

Teorema da Cauchy (Domínios Simplesmente Conexos): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio D_f . Se D_f é simplesmente conexo, então

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

para qualquer caminho fechado γ em D_f .

Corolário: Funções holomorfas em domínios simplesmente conexos têm primitiva.

Teorema de Cauchy-Goursat

Definição: Diz-se que dois caminhos γ e $\tilde{\gamma}$ são **homotópicos** no domínio Ω se existe uma aplicação contínua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ tal que

- $H(0, t) = \gamma(t) \quad 0 \leq t \leq 1,$
- $H(1, t) = \tilde{\gamma}(t) \quad 0 \leq t \leq 1.$

Diz-se que são **caminhos homotópicos fechados** se $H(s, 0) = H(s, 1)$ para todo $0 \leq s \leq 1$.

Diz-se que são **caminhos homotópicos de extremos fixos** $z_0, z_1 \in \Omega$ se $H(s, 0) = z_0$ e $H(s, 1) = z_1$ para todo $0 \leq s \leq 1$.

Teorema da Deformação (Cauchy-Goursat): Seja $f : D_f \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa no domínio D_f e $\gamma, \tilde{\gamma}$ dois caminhos homotópicos em D_f , fechados ou de extremos fixos. Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz.$$

Em particular, se γ for um caminho fechado homotópico a um ponto em D_f tem-se

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$